

## مقبولیت اثباتهای تصویری در ریاضیات

حسین بیات<sup>۱</sup>

### چکیده

اغلب ریاضی دانان اثباتهای تصویری را به عنوان یک نوع اصیل از اثباتهای ریاضیاتی نمی پذیرند یا در پذیرش آنها تردید دارند. در این مقاله ده ایراد متداول یا احتمالی وارد بر این نوع اثباتها صورت بندی شده و جداگانه مورد ارزیابی نقادانه قرار گرفته است. در هر یک از این ایرادها ادعا می شود که اثباتهای تصویری فاقد یکی از ویژگی هایی هستند که برای اثباتهای ریاضیاتی اساسی اند یا باید اساسی باشند: صوری بودن، نمادی بودن، دقیق بودن، اعتمادپذیری، و ارسی پذیری، کلی بودن، مشروعیت، خودبستگی، فراگیر بودن و زایا بودن. اما به نظر می رسد که هیچ کدام از این ایرادها وارد نیست و بنابراین نپذیرفتن این نوع از اثباتها بیشتر معلول عوامل روان شناختی و جامعه شناختی، به خصوص غلبه تلقی صورت-گرایانه در جامعه ریاضی و القاء آموزه های صورت گرایانه در نظام های آموزش ریاضی است تا دلایل منطقی یا روش شناختی. ما نه تنها دلایل قوی بر رد کلی و پیشینی این نوع اثبات، به عنوان یک الگوی استنتاجی در ریاضیات، نداریم بلکه دلایل خوبی برای به رسمیت شناختن آن داریم. آنچه در اینجا حائز اهمیت است آگاهی از نقشی است که این نوع از اثباتها در کل ریاضیات دارد یا باید داشته باشد، نه کمتر و نه بیشتر.

**واژگان کلیدی:** اثباتهای تصویری، اعتمادپذیری، مشروعیت، خودبستگی،

---

تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۱۱

۱. دکترای فلسفه علم و مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران.

Logicbay@yahoo.com

مقبولیت، خطا پذیری.

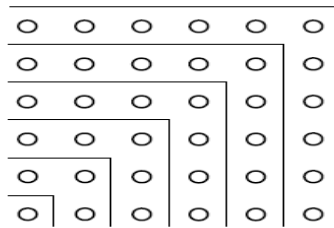
### مقدمه

منظور از «اثباتهای تصویری»<sup>۱</sup> اثباتهایی هستند که بار اقناع یا توجیه در آنها به دوش تصویر است. مثلاً مدعا و اثبات زیر را در نظر بگیرید:

**مدعای شماره ۱:** معادله زیر، به ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، مانند  $n$ ، صادق است.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (*)$$

### اثبات شماره ۱:



تصویر ۱: اگر نقاطی را به تعداد دلخواهی از اعداد فرد، یعنی به تعداد  $1+3+5+\dots+2n-1$  (در اینجا  $n=6$ ) و به ترتیب خاصی (در اینجا ردیف‌هایی به شکل ۶) طوری کنار هم بچینیم که بتوان تا هر عدد فرد دلخواهی آن را ادامه داد، آنگاه توانسته‌ایم «عمل جمع اعداد فرد متوالی» را که در سمت چپ معادله \* بیان شده به صورت «چیدن خانه‌هایی با تعداد فرد نقطه» به تصویر بکشیم. تصویر بدست آمده مربعی است که در هر ضلع آن  $n$  نقطه وجود دارد. بنابراین در کل این مربع باید  $n^2$  نقطه وجود داشته باشد، و این همان عددی است که در سمت راست معادله \* ادعا شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تصویر در اینجا نه صرفاً به عنوان یک ابزار کمکی و فرعی، بلکه به عنوان بخش تعیین کننده و اجتناب‌ناپذیری از اثبات به کار رفته است؛ به طوری که بدون آن، استدلال کننده در اقناع مخاطب یا توجیه مدعا موفق نخواهد بود.

<sup>1</sup>. pictorial proofs

اثباتهای تصویری را باید در مقابل اثباتهای نمادی<sup>۱</sup> به کار ببریم. در اثبات نمادی، همه کارکردهای اساسی یک اثبات، مثل توجیه و اقصاع و تبیین، از طریق نمادها انجام می‌پذیرد. البته تردیدی نیست که در نوشتن اثباتهای نمادی، افزون بر نمادهای ریاضیاتی، یعنی علائم زبان صوری یا مصنوعی زبان ریاضیات، از نمادهای زبان طبیعی، یعنی انواع تعبیرها (اعم از حروف و عبارتها و جملات زبان طبیعی) نیز استفاده می‌شود. گاهی نیز علاوه بر نمادهای زبان طبیعی، از تصاویر و نمودارها نیز به‌عنوان ابزارهای کمکی استفاده می‌شود؛ اما طبق نگرش متعارف و سنتی، می‌توان تصاویر و نمودارها و حتی، در صورت لزوم، نمادهای زبان طبیعی را کنار گذاشت. همین‌جا بهتر است حساب اثباتهای تصویری را از اثباتهای نمادی مصور<sup>۲</sup> جدا کنیم. همان‌طور که در بالا تصریح کردیم تصویر یا نمودار در اثباتهای تصویری نقش اجتناب‌ناپذیری دارند؛ به‌طوری‌که با حذف تصاویر یا نمودارها اثبات ناتمام و بنابراین نامعتبر خواهد شد؛ در صورتی‌که تصویرها و نمودارها در اثباتهای نمادی مصور صرفاً با هدف آسان‌یاب کردن مدعیات و مفاهیم و فرایندها به کار می‌روند و بنابراین قابل حذف هستند.

اثباتهای تصویری، برخلاف اثباتهای نمادی، اساساً مناقشه‌آمیزند؛ یعنی ریاضی‌دانان در پذیرش آنها، به‌عنوان یک نوع اصیل<sup>۳</sup> و مستقل از اثباتها، اتفاق نظر ندارند. حتی در نگاه نخست، به نظر می‌رسد که از نظر تقریباً همه ریاضیدانان، این نوع از اثباتها فقط «شبه‌اثبات»<sup>۴</sup> هستند و نه اثبات واقعی. جیمز رابرت براون تلقی متعارف درباره نمودارها و تصاویر را این‌گونه توصیف می‌کند:

- نمودارها و تصاویر به‌لحاظ روان‌شناختی مفیدند؛ اما چیزی را اثبات نمی‌کنند.

- نمودارها و تصاویر حتی ممکن است گمراه‌کننده باشند. (Brown, 2008, 7)

این تلقی ریشه در آموزه‌های صورت‌گرایانه دارد. هیلبرت درباره استفاده از اشکال<sup>۵</sup>

---

1. Symbolic proofs  
 2. Illustrated proofs  
 3. genuine  
 4. Pseudo-proof  
 5. figure

و نمودارها<sup>۱</sup> در اثباتها می‌گوید:

اثبات می‌تواند با توسل به یک تصویر مناسب ارائه شود؛ اما این توسل به تصاویر را نباید ضروری بینداریم. تصاویر می‌توانند تعبیرها را آسان‌تر کنند و ابزار ثمربخشی برای کشف قضایای جدید به حساب آیند. اما [...] قضیه تنها زمانی ثابت می‌شود که اثبات در کار باشد؛ اثباتی که مستقل از نمودارهاست و گام به گام بر اصول موضوعه استوار است. (Hilbert, 1894, 11)

اما چنین دیدگاهی تا چه اندازه قابل دفاع است؟ یعنی مخالفین معمولاً چه دلایلی برای نامقبولیت این نوع از اثباتها ارائه می‌دهند و این دلایل تا چه میزان عقلانی و قابل دفاع هستند؟ این پرسش اصلی این نوشتار است و من برای پاسخ به آن، ایرادهایی را که تا کنون طرح شده است یا می‌توان طرح کرد، در ذیل ده بند، جداگانه، تقریر و نقادانه بررسی خواهم کرد.

اثباتهای تصویری، گرچه در نگرش متعارف و سنتی همواره با تردید و انکار همراه بوده‌اند، اما کاربران و مدافعان قابل توجهی هم داشته‌اند. شاید بتوان گفت که لاکاتوش اولین کسی است که بعد از غلبه صورت‌گرایی، از اثباتهای غیرصوری دفاع کرده است. البته او مشخصاً از اثباتهای تصویری نام نمی‌برد؛ اما منحصر کردن استدلالها و اثباتهای ریاضی به اثباتهای صوری را نقد می‌کند و نشان می‌دهد که همچنان بخش مهمی از اثباتهای ریاضی‌دانان، در قلمروهای مختلف ریاضیات، غیرصوری هستند. اثباتهای تصویری را نیز می‌توان در ذیل همین نوع از اثباتها پذیرفت. او حتی خود برای حدس اویلر یک اثبات غیرصوری ارائه می‌دهد که در حقیقت، طبق تعریفی که در ابتدای این مقاله آوردیم، باید آن را یک اثبات تصویری قلمداد کنیم.

افزون بر دیدگاه شبه تجربه‌گرایانه لاکاتوش، از منظر نهاد‌گرایانه نیز کسانی مثل هرش و دیویس به دفاع از اثباتهای تصویری پرداخته‌اند. آنها با متمایز ساختن و رسمیت بخشیدن به اثباتهای عملی، راه را عملاً برای پذیرش این نوع اثباتها هموار ساختند: «اثبات به این معنا همان کاری است که ریاضی‌دان انجام می‌دهد تا دیگران را متقاعد سازد» (Hersh, 1997, 49). اما در سه دهه اخیر، یعنی از دهه ۹۰ قرن بیستم به این سو،

<sup>۱</sup>. diagram

اثباتهای تصویری به عنوان نوع معینی از اثباتهای غیرصوری مستقلاً موضوع مطالعات و مذاقه‌های فلسفی و کاوش‌های ریاضی قرار گرفته و تلاشهای بیشتری برای دفاع عقلانی از آنها به عمل آمده است که مهم‌ترین آنها به وسیله باروایز و اچمنندی در «اطلاعات دیداری و استدلال معتبر» (۱۹۹۱)، و جیمز رابرت براون در «اثباتها و تصاویر» (۱۹۹۷) صورت پذیرفته است<sup>۱</sup>. راجر نلسون نیز در کتاب دو جلدی «اثباتهایی بدون واژه‌ها» (۱۹۹۱ و ۲۰۰۰) انواعی از این اثباتها را جمع‌آوری و دسته‌بندی کرده است (اثبات شماره ۱ از جمله آنهاست).

همان‌طور که دتلفسن نیز جمع‌بندی کرده است، «تا کنون دو دسته از دلایل علیه نقش توجیهی اصیل نمودارها [و تصاویر] ارائه شده است؛ دلایلی که بر اعتمادناپذیری [...] و دلایلی که بر جزئی بودن [اثباتهای تصویری] ارائه شده‌اند.» (Detlefsen 2008, 20) بنابراین دلایلی هم که معمولاً در این آثار به نفع اثباتهای تصویری ارائه شده‌اند، در واقع یا برای رد اعتمادناپذیری کلی این نوع اثباتها یا برای رد جزئی بودن آنهاست؛ درحالی‌که ایرادهای بیشتری به اثباتهای تصویری می‌توان وارد کرد که من در این نوشتار به آنها نیز اشاره و نقدشان خواهم کرد. گاهی نیز این دو ایراد، یعنی اعتمادناپذیری و جزئی بودن، با ایرادهای دیگری، از جمله عدم مشروعیت و واریسی‌پذیری، خلط می‌شوند؛ درحالی‌که هر کدام از این ایرادها استلزامات متفاوتی دارند و من در اینجا، با متمایز کردن ایرادهای مختلف، مانع این نوع خلط‌ها نیز خواهم شد.

### اثباتهای تصویری، صوری<sup>۲</sup> نیستند

شاید بدیهی‌ترین ایراد اثباتهای تصویری، از منظر ریاضیدانان معاصر، غیرصوری بودن

---

<sup>۱</sup>. مطالعات دیگری نیز درباره نقش‌های تبیینی و اکتشافی تصاویر و نمودارها در ریاضیات صورت پذیرفته است؛ به خصوص مارکوس جیا کوئینتو در «تفکر دیداری در ریاضیات: یک بررسی معرفت‌شناختی» (۱۹۹۴) و اریک همبر در «منطق و اطلاعات دیداری» (۱۹۹۵). گزارش خوبی از این کارها را می‌توانید در مقاله مانکوز با عنوان «دیداری‌سازی در منطق و ریاضیات» (۲۰۰۵) بیابید. مانکوز نیز از طرفداران اثباتهای تصویری است.

<sup>۲</sup>. formal

آنها باشد: اثباتهای تصویری نامقبول‌اند چون صوری نیستند. یعنی در یک نظام صوری معین و صرفاً براساس اصول موضوعه و قواعد آن نظام ارائه نشده‌اند. این ایراد را می‌توان در نقل قولی که از هیلبرت آوردیم مشاهده کرد. او در توصیف اثبات و نقش تصاویر نمودارها در آن می‌گوید: «قضیه تنها زمانی ثابت می‌شود که اثبات در کار باشد؛ اثباتی که مستقل از نمودارهاست و گام به گام بر اصول موضوعه استوار است.» (Hilbert, 11, 1894) اما این ایراد زمانی وارد است که ما لزوماً خود را مقید به ارائه و پذیرش اثباتهای صوری کرده باشیم، مثل بورباکی‌ها یا کسانی که به برنامه هیلبرت متعهد هستند؛ درحالی که عملاً ریاضیدانان به چنین برنامه و قیدهایی صورت‌گرایانه متعهد نیستند و بسیاری از اثباتهایی که ارائه می‌دهند و می‌پذیرند، به معنای دقیق کلمه، صورت‌گرایانه نیستند.

فیلسوفان و ریاضیدانان فراوانی به سود این مدعا که شرط صوری بودن اثباتهای ریاضی غیرضروری و حتی غیرممکن است استدلال کرده‌اند که از میان آنها می‌توان به استدلال لاکاتوش و هرش اشاره کرد. لاکاتوش دو نوع اثبات غیرصوری را، با قیدهایی «پیشاصوری» و «پساصوری»، از یکدیگر متمایز می‌کند و با استناد به شواهد تاریخی یا ارائه مثالهای مؤید، مصادیق متعددی را برای آنها برمی‌شمارد (Lakatos, 1978, 61). منظور او از اثباتهای پیشاصوری، استدلالهای موفقی هستند که پیش از شکل‌گیری یا توسعه کافی یک دستگاه صوری اصل موضوعی ارائه می‌شوند؛ مثل اثبات فرایابانه<sup>۱</sup> حدس اویلر<sup>۲</sup> که خود لاکاتوش آن را ارائه کرد<sup>۳</sup> یا اثبات فرایابانه قضیه کوشی در نیمه

<sup>۱</sup>. heuristic

۲. اگر  $V$  تعداد رئوس و  $E$  تعداد یالها و  $F$  تعداد وجوه یک چندوجهی باشند، آنگاه رابطه  $V - E + F = 2$  برقرار است.

۳. لاکاتوش (۱۹۲۲-۱۹۷۴) در رشته‌های منطق، ریاضیات و فیزیک تحصیل کرده و زیر نظر آلفرد رنی درباره نظریه احتمال و نظریه اندازه کار کرده بود. او به پیشنهاد جرج پولیا درباره حدس اویلر کار کرد و در کتاب «اثباتها و ابطالها: منطق اکتشاف ریاضیاتی» (۱۹۵۷) و مقاله «اثباتهای ریاضیاتی چه چیزی را ثابت می‌کنند؟» (۱۹۶۱-۱۹۵۹) از طریق یک آزمایش فکری، درستی حدس اویلر را نشان داد.

اول قرن نوزدهم<sup>۱</sup>. اما اثباتهای پسا‌صوری اثباتهای ناظر به فراقضایای یک دستگاه صوری هستند؛ به طوری که فرانظریه‌ای صوری برای تعیین اعتبار آن اثباتها در کار نیست؛ مثل اثباتهای تصمیم‌ناپذیری در منطق، یا اثبات اصل دوگانگی<sup>۲</sup> در هندسه تصویری.

هرش نیز ضمن تمایز اثباتهای صوری از «اثباتهای عملی» نشان می‌دهد که بسیاری از اثباتهای ریاضی از همین نوع اخیر هستند: «اثباتهای فی‌الواقع زنده»<sup>۳</sup> در ریاضیات همان اثباتهای غیرصوری‌اند» (Hersh, 1997, 57). به نظر می‌رسد که تلقی لاکاتوش و هرش نسبت به دیدگاه صورت‌گرایان و متعارف واقع‌بینانه‌تر است؛ زیرا اولاً به گواهی تاریخ ریاضیات، اثباتهای پذیرفته‌شده لزوماً صوری نیستند، ثانیاً به حکم قضایای ناتمامیت گودل، حتی اثباتهای نمادی در نظامهای حاوی حساب مقدماتی (PA) نمی‌توانند کاملاً یا مطلقاً صوری باشند.

باید توجه کرد که ریاضی‌دانان عملاً اثباتهای غیرصوری را نه به‌عنوان یک نوع اثبات متکی بر اثباتهای صوری یا یک نوع شبه‌اثبات، بلکه به‌عنوان یک نوع اصیل و مستقلاً معتبر، می‌پذیرند. لاکاتوش و هرش، به‌طور جداگانه و با دو رویکرد مختلف، یعنی به ترتیب از منظر واقع‌گرایانه و ناواقع‌گرایانه، استدلال می‌کنند که اثباتهای غیرصوری اصیل هستند (Bayat, 2015, 80). پس صوری بودن شرط لازم برای اثبات بودن نیست.

۱. کوشی قضیه‌ای را در اوایل قرن نوزدهم اثبات کرد که به‌موجب آن، اگر سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  به ازای هر  $x$  به  $f(x)$  همگرا باشد و همه  $f_n$  ها پیوسته باشند، آنگاه  $f$  نیز پیوسته است. اما آبل در ۱۸۳۶ متوجه شد که قضیه کوشی درباره سری فوریه صدق نمی‌کند. یعنی اگر تابع  $f_n$  را  $-1^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$  در نظر بگیریم در این صورت قضیه کوشی برقرار نیست. سرانجام سایدل در ۱۸۴۷ کشف کرد که دلیل نقض قضیه کوشی نایکنواخت بودن همگرایی سری فوریه است و بنابراین او قضیه کوشی را با افزودن این شرط (یعنی همگرایی یکنواخت  $f_n$  ها) دوباره اثبات نمود.

۲. طبق این اصل، با جابه‌جایی واژه‌های «نقطه» و «خط» در گزاره معتبری که درباره برخورد نقاط و خطوط در صفحه تصویری است، یک گزاره معتبر دیگر به دست می‌آید.

۳. real – life proofs

### اثباتهای تصویری، نمادی<sup>۱</sup> نیستند

نمادی بودن را نباید با تصویری بودن اثبات یکسان بگیریم. نمادی بودن شرط لازم تصویری بودن اثبات است، اما کافی نیست. اثبات تصویری، افزون بر نمادی بودن، باید در درون یک نظام استنتاجی معین، شامل اصول موضوعه مناسب و قواعد معین، قابل طرح باشد. اثباتهای ریاضیاتی متعارف شاید، به معنای دقیق کلمه، تصویری نباشند؛ اما در هر حال، همه آنها نمادی هستند؛ در حالی که اثباتهای تصویری به لحاظ نشانه‌شناختی از مقوله شمایل (آیکون) هستند و نه نماد، و بنابراین نمی‌توان آنها را حتی به مثابه اثباتهای ریاضیاتی غیرصوری پذیرفت. اما این دلیل علیه اثباتهای تصویری نیز به خودی خود نمی‌تواند قانع‌کننده باشد؛ یعنی تصویری یا نمادی بودن یک استدلال نمی‌تواند دلیل مقبولیت یا نامقبولیت آن باشد؛ زیرا ما باید مقبولیت یک استدلال را در توانایی ایفای نقشی که از آن انتظار داریم جستجو کنیم. حال، از یک سو، روشن است که نقش و کارکردی که ما از یک استدلال انتظار داریم چیزی جز اقناع شناختی<sup>۲</sup> مخاطب یا توجیه منطقی یک گزاره یا باور نیست. گاهی نیز البته استدلال‌ها کارکردهای دیگری مثل تبیین و تفسیر دارند یا پیامدهای مهمی مثل توسیع دارند؛ اما در هر حال، اقناع شناختی (در مقابل اقناع عاطفی) و توجیه صدق نتیجه بر اساس صدق مقدمات، دو کارکرد اصلی استدلال‌ها هستند.

از سوی دیگر، درباره استدلالهای تصویری، نه تنها نمی‌توان به نحو مطلق و از قبل حکم کرد که آنها از اقناع شناختی اعضای جامعه ریاضی یا توجیه منطقی مدعیات یا گزاره‌های ریاضیاتی ناتوان‌اند، بلکه ما شواهد خوبی داریم که نشان می‌دهند اگر استدلالهای تصویری به درستی ارائه شوند، مثل استدلال به کاررفته در اثبات شماره ۱، می‌توانند به خوبی از عهده این نقشها برآیند. بنابراین این ایراد نیز به نحو مطلق و کلی وارد نیست.

### اثباتهای تصویری، دقیق<sup>۳</sup> نیستند

1. symbolic  
2. Cognitive persuasion  
3. rigor



مک لان در تعریف اثبات دقیق می گوید: «یک اثبات دقیق است هرگاه به زبان محمولات مرتبه اول  $L(\epsilon)$  و به عنوان دنباله‌ای از استنتاج‌های حاصل از اصول ZFC نوشته شود یا بتوان آن را نوشت؛ به طوری که هر کدام از استنتاجها باید مطابق با یکی از قواعد مقرر باشد.» (Mac Lane, 1986, 377) حال، اگر ما دقیق بودن را به این ترتیب با صوری بودن یا نمادی بودن مترادف بگیریم، یا حتی اگر صوری بودن یا نمادی بودن را شرط لازم دقت بدانیم، آنگاه اثباتهای تصویری نمی‌توانند دقیق باشند. این در واقع دیدگاهی است که بسیاری از ریاضی دانان دارند یا ممکن است مخالفان در توضیح دلایشان به آن متوسل شوند. اما این ایراد متضمن مغالطه «مصادره به مطلوب» است و بنابراین قابل دفاع نیست. یعنی معلوم نیست که چرا ما باید این تلقی انحصارطلبانه از مفهوم «دقت ریاضیاتی» را معیار قرار دهیم؟

هرش و دتلفسن، جداگانه، به این انحصارطلبی اعتراض کرده‌اند. به عقیده هرش مفهوم اثبات دقیق باید به گونه‌ای اصلاح شود که بتوان اثباتهای مبتنی بر محاسبات ماشینی یا شواهد عددی کافی یا الگوریتم‌های احتمالاتی کافی را نیز بر اساس آن مفهوم فهمید و توضیح داد (Hersh, 1997, 58). دتلفسن نیز رأی مشابهی دارد. او تلقی متعارف ریاضی دانان درباره دقت را نتیجه غلبه نگاه صورت‌گرایانه در اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن بیستم می‌داند و در نقد آن دلایلی را ارائه می‌دهد که می‌توان در قالب دو نقد آنها را بازگویی کرد: دلیل نخست در واقع یک دلیل نقضی یا تاریخی است؛ یعنی ریاضی دانان عملاً اثباتهای غیرصوری دقیقی ارائه داده‌اند (Detlefsen, 2008, 20). دلیل دیگر دلیل ردی است؛ یعنی می‌توان تعریف بدیل بهتری از دقت ریاضی را، به-خصوص در اثباتهای غیرصوری، ارائه داد؛ یعنی همان مفهوم مناسبی از دقت که به قول هرش بتوان درباره انواع غیرصوری تر اثباتها نیز آن را به کار بست.

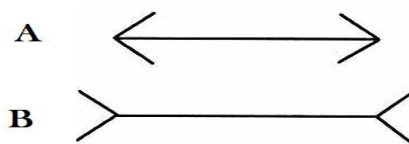
دتلفسن پیشنهاد روبینسون<sup>۱</sup> را می‌پسندد: اثباتی دقیق است که شفافیت تبیینی داشته باشد (Detlefsen, 2008, 19). منظور آنها از شفافیت تبیینی رابطه معناداری است که بین مقدمات و نتیجه برقرار است و ما به واسطه آن می‌توانیم چرایی نتیجه را توضیح

<sup>1</sup>. Robinson, J.

دهیم. آنها استدلال می‌کنند که درجه دقت اثباتها تابعی از میزان شکافهایی است که ریاضی‌دانان هنگام تبیین روابط ریاضیاتی، خواه‌ناخواه، به جا می‌گذارند. هرچه تعداد و فاصله این شکافهای تبیینی بیشتر باشد، از درجه دقت اثبات کاسته می‌شود. صورتی‌سازی یا نمادی‌سازی هم در حقیقت تدبیری است که ریاضی‌دانان برای پرهیز از این شکافها به کار می‌گیرند؛ اما یگانه تدبیر نیست. ریاضی‌دانان به هر طریق دیگری هم، اگر بتواند این شکافها را به اندازه کافی کمتر کنند، به دقت کافی در اثبات خواهند رسید. به نظر می‌رسد این تلقی از دقت، درباره اثباتهای تصویری نیز می‌تواند صادق باشد. مثلاً در تصویر ۱، چرایی گذر بین طرفین معادله مذکور آشکار است. حال اگر با این تلقی از مفهوم دقت در اثباتهای ریاضیاتی به اثباتهای تصویری توجه کنیم، نمی‌توان از قبل و به‌طور مطلق، همه آنها را نادقیق خواند. حتی می‌توان مدعی شد که تصاویر و نمودارها به‌جهت توانش تبیینی بالایی که دارند، اگر بجا و به‌درستی به کار روند، می‌توانند با پر کردن شکافهای تبیینی، دقیق‌ترین اثباتها را در اختیار ما بگذارند. بنابراین این ایراد نیز وارد نیست.

### اثباتهای تصویری، اعتمادپذیر نیستند

اثباتهای تصویری، به‌علت گمراه‌کننده بودن تصاویر، اعتمادپذیر نیستند و این شاید مهم‌ترین دلیلی باشد که معمولاً در رد این نوع از اثباتها بیان می‌شود. خطای مولر-لایر<sup>۲</sup>، نمونه معروف از خطاهای ادراکی تصویری است:



**تصویر ۲:** گرچه طول پاره‌خطهای A و B برابر است، واگرایی سرهای A و همگرایی سرهای B موجب شده است که طول آنها متفاوت به نظر رسد. این خطای ادراکی به‌علت آن است که ما پاره‌خطها را در یک چارچوب مکانی معین، یعنی زمینه

<sup>۱</sup>. misleader

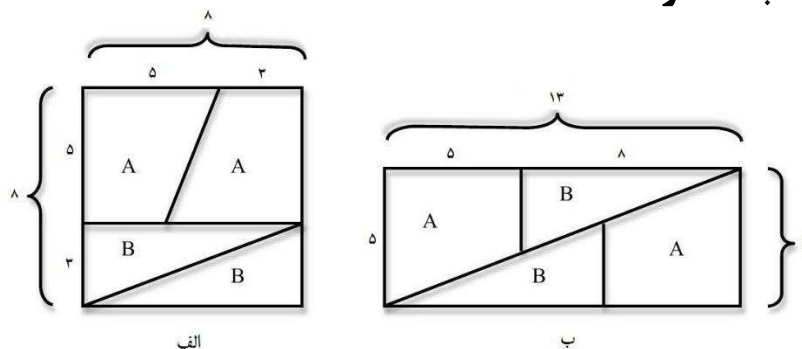
<sup>۲</sup>. Muller-Lyer illusion

تصویر، درک می‌کنیم، نه به‌نحو مستقل و فی‌نفسه.

اما تصویر چگونه ممکن است اثبات را گمراه‌کننده سازد؟ اثبات تصویری زیر را در نظر بگیرید:

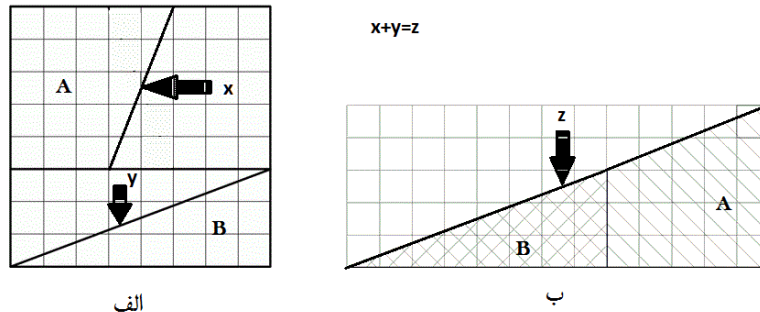
– مدعی شماره ۲:  $۶۵=۶۴$

– اثبات شماره ۲:



**تصویر ۳:** اگر دوزنقه‌ها و مثلثهای شکل الف را به ترتیب بالا و به شکل ب بازچینی کنیم، به نظر می‌رسد که مساحت مجموع قطعات در طرفین باید مساوی باشد؛ یعنی:  $۱۳ \times ۵ = ۶۵$  یا  $۸ \times ۸ = ۶۴$ .

به همین دلیل است که هیلبرت هشدار می‌دهد در استفاده از نمودارها و تصاویر مراقب باشیم: «... چون آنها به راحتی می‌توانند گمراه‌کننده باشند.» (Hilbert, 1894, 11). در مقابل، نمادها نه تنها گمراه‌کننده نیستند، بلکه ما با توسل به آنها می‌توانیم خطاهای تصویری را هم تبیین کنیم و حتی میزان خطا را نشان دهیم. برای این کار، تصاویر الف و ب را در صفحه مشبکی از مربع‌هایی به مساحت یک واحد در نظر بگیرید:



تصویر ۴

با اعتماد به تصویر باید پذیرفت که اگر  $x$  و  $y$  در الف، به ترتیب وتر دو مثلث قائم-الزاویه با اضلاع  $(x, 5, 2)$  و  $(y, 8, 3)$  باشند، آنگاه  $x+y=Z$ . برای بررسی این مدعا ابتدا  $x$  و  $y$  را به طور جداگانه، با استفاده از قضیه فیثاغورس، به دست می آوریم و سپس مجموع  $x+y$  آن را محاسبه می کنیم:

$$\sqrt{2^2 + 5^2} + \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{29} + \sqrt{73} \approx 5.385 + 8.544 = 13.929$$

درحالی که  $Z$  وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است با اضلاع  $(z, 5, 13)$  و بنابراین:

$$Z = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194} \approx 13.928$$

چشم ما از درک همین 0.001 واحد اختلاف ناتوان است و اختلاف شیب این دو مثلث به قدری تدریجی و ناچیز است که ما قادر به تشخیص آن به واسطه ادراک حسی نیستیم و با کمک نمادها می توان این میزان از خطا و حتی بسیار کمتر از آن را تشخیص و نمایش داد.

اما آیا گمراه کنندگی مختص تصاویر است؟ برای پاسخ به این پرسش اجازه دهید کمی مفهوم گمراه کنندگی را واکاوی کنیم. برای این کار بار دیگر اثبات شماره ۲ را در نظر بگیرید. چه چیزی در آن ما را به نتیجه عجیب و آشکارا نادرست  $64 = 65$  رسانده است؟ طبق استدلال هیلبرت و ریاضی دانان کلاسیک، اثبات تصویری شماره ۲، از یک سو وابستگی تعیین کننده به تصاویر الف و ب دارد و از سوی دیگر مساحت این دو تصویر اختلاف بسیار جزئی و نامحسوسی دارد. یعنی گمراه کنندگی تصاویر بیان

دیگری از خطاپذیری<sup>۱</sup> ما در ادراک حسی است. حال باید ببینیم آیا ما فقط در بیان یا بررسی اثباتهای تصویری خطاپذیر هستیم یا در مواجهه با اثباتهای نمادی هم وضعیت مشابهی داریم؟ مثلاً اثبات نمادی زیر را در نظر بگیرید:

– مدعی شماره ۳:  $2=1$

– اثبات شماره ۳:

1.  $a=b$
2.  $a^2=ab$
3.  $a^2-b^2=ab-b^2$
4.  $(a+b)(a-b)=b(a-b)$
5.  $a+b=b$
6.  $b+b=b$
7.  $2b=b$
8.  $2=1$

ممکن است گفته شود خطایی که در اثبات نمادی شماره ۳ رخ داده صرفاً معلول شتابزدگی و کم‌دقتی استدلال‌کننده است؛ یا، به بیان صورت‌گرایانه، خطای مذکور صرفاً معلول به کارگیری نادرست یک قاعدهٔ صوری در گذر از سطر ۴ به سطر ۵ است. اما چرا چنین توجیهی را فقط باید دربارهٔ خطاهای نمادی بپذیریم؟ آیا جز این است که در اثبات تصویری شماره ۲ نیز، بر خلاف اثبات تصویری شماره ۱، استدلال‌کننده دچار شتابزدگی و کم‌دقتی شده است؟ آیا جز این است که در بازچینی قطعات نیز می‌توانستیم قواعد معینی را وضع کنیم تا مانع بازچینی قطعات با شیب‌های نامساوی شود؟ یا دست‌کم تقریبی بودن این همانی  $x+y$  و  $z$  را آشکار کند؟

ممکن است گفته شود که با پذیرش تصاویر در مقام داوری، ما معرفت ریاضی خود را در معرض خطاهای ادراکی<sup>۲</sup> قرار داده‌ایم و هیچ تضمینی برای مصونیت از آنها نداریم. این سخن البته درست است. این مدعا هم درست است که بگوییم خطاهای

<sup>1</sup>. fallibility

<sup>2</sup>. illusions

ادراکی دیداری<sup>۱</sup> در اثباتهای نمادی منتفی است. اما مگر اثباتهای نمادی از هر نوع خطای ادراکی مصون هستند؟ ما با پذیرش نمادها در مقام داوری، در واقع معرفت ریاضی خود را در معرض انواع خطاهای ادراکی لفظی<sup>۲</sup>، مثل خطای ناشی از تایپوگلاسمیا<sup>۳</sup>، قرار می‌دهیم. برخی از خطاهای ادراکی نیز در کارند که در هر دو نوع نشانه، یعنی تصاویر و نمادها، محتمل هستند؛ مثل خطاهای ناشی از سوگیریهای شناختی<sup>۴</sup>. اما نتیجه‌ای که باید از اینها بگیریم خطاباوری<sup>۵</sup> در ریاضیات است، نه اعتمادناپذیری اثباتها یا شکاکیت افراطی در ریاضیات. آنچه اعتمادپذیری اثباتها را تضمین می‌کند و ارسی‌پذیری آنهاست (همان ویژگی که در بند بعدی به سراغ آن خواهیم رفت)، نه خطانپذیری آنها.

باز ممکن است گفته شود که استدلال‌کننده، گرچه در اثباتهای نمادی در معرض خطا است، اما استدلالهای نمادی خود/صلاحگر هستند و می‌توان دلیل یا علت خطا و حتی میزان خطا را به وسیله آنها نشان داد. مثلاً در اثبات شماره ۳، گذر از گام ۴ به گام ۵ متضمن به کارگیری نادرست یک قاعده است (طرفین تساوی را می‌توان بر هر عددی تقسیم کرد، مگر عدد صفر). همچنین خطای استدلال تصویری بالا در نادیده گرفتن

1. visual illusions

2. Verbal illusions (word illusions)

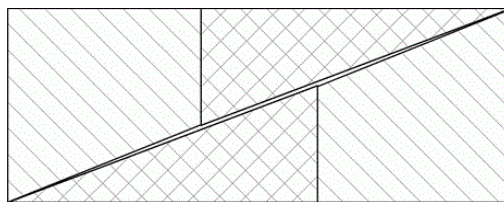
3. Typoglycemia

«تایپوگلاسمیا» یک اصطلاح ساختگی مرکب از «تایپو» به معنای خطای تایپی و «هیپوگلاسمی» به معنای کم شدن قند خون است. این اصطلاح برای اشاره به فرایند شناختی خاصی که هنگام خواندن نوشتار صورت می‌پذیرد، وضع شده است: اگر در یک متن حروف اول و آخر کلمات ثابت بمانند و بقیه حروف درون کلمات جابه‌جا شوند، ذهن هنوز قادر است کلمات را تشخیص دهد و متن را به راحتی بخواند و درک کند. این پدیده گرچه سرعت درک متن را افزایش می‌دهد و مصرف انرژی لازم برای دریافت و پردازش اطلاعات نوشتاری را کاهش می‌دهد، اما احتمال خطاهای ادراکی نوشتاری را نیز افزایش می‌دهد؛ به طوری که بسیاری از خطاهای ویرایشی معلول همین پدیده شناختی است. اثباتهای نمادی نیز، به خصوص وقتی طولانی باشند، در معرض خطای ادراکی مشابهی قرار می‌گیرند؛ مثل خطایی که در اثبات شماره ۳ هست.

4. Attentional bias

5. fallibilism

اختلاف  $0/001$  واحد در جمع وترها، یا نادیده انگاشتن اختلاف شیب  $\frac{3}{8}$  و  $\frac{2}{5}$  است. در دفاع از اثباتهای تصویری می توان گفت که تصاویر نیز، اگر به درستی به کار روند، دست کم در بعضی مواقع، می توانند علت و میزان خطا را نشان دهند. مثلاً تصویر زیر را در نظر بگیرید:



تصویر ۵

این تصویر به خوبی دلیل و میزان خطا را نشان می دهد. حتی این نیز فی نفسه، یعنی به نحو مطلق و پیشینی، اهمیت ندارد که ما میزان خطا را در قالب عدد بازنمایی کنیم یا در قالب تصویر. اما سیطرهٔ کمیت در اندیشهٔ ریاضیات معاصر به حدی است که گویا شکاف بین وترهای دو مثلث در تصویر ۵ معنای معینی را منعکس نمی کند و این تنها ارقام هستند که معنادار هستند. اهمیت و جایگاه رقم و تصویر کاملاً دگرگون خواهد شد اگر ما به جای چارچوب فکری صورت گرایی، چارچوب افلاطون گرایی را انتخاب کنیم.

شاید مخالفان بگویند که گمراه کنندگی و خطاپذیری اثباتهای تصویری یا اثباتهای نمادی قابل مقایسه نیست؛ زیرا اثباتهای تصویری همهٔ جزئیات را بیان نمی کنند و بسیار بر تعبیر بیننده استوار هستند و در واقع واجد رخنه ها و شکاف های فراوانی هستند. اما این ایراد نیز وارد نیست. اثباتهای نمادی، بر خلاف تصور عامیانهٔ ریاضی دانان، بسیار کلی تر و پرشکاف تر از آن هستند که نشان می دهند. در این زمینه، فیلسوفان نکات مهمی را گوشزد کرده و استدلالهای خوبی را ارائه داده اند. مثلاً فالیس (۲۰۰۳) ضمن معرفی مفهوم شکاف<sup>۱</sup> در اثباتهای نمادی، سه نوع شکاف در اثباتهای نمادی را از هم متمایز کرده است. در تعریفی که او پیشنهاد می کند، شکاف عبارت است از «هر بخش از اثبات نوشته شده ای که صرفاً حاصل به کارگیری قواعد معتبر استنتاج روی سطرهای قبلی

<sup>۱</sup>. gap

نیست» (Fallis, 2003, 58). فالیس نشان می‌دهد که در اغلب اثباتهای بالفعل که جامعه ریاضی ارائه می‌کند، شکاف وجود دارد. او شکاف را به چند دسته طبقه‌بندی می‌کند (Fallis, 2003, 59):

- شکاف استنتاجی<sup>۱</sup>: گاهی ریاضی‌دان زنجیره خاصی از گزاره‌ها را در بدنه یک اثبات به کار می‌برد؛ بدون آنکه دلایل معینی در ذهن یا کاغذ برای آن بخش از اثبات داشته باشد.
- شکاف اضماری یا نهفته<sup>۲</sup>: گاهی ریاضی‌دان زنجیره معینی از گزاره‌هایی را که در ذهن دارد، چه به دلیل سبک نگارش و چه به سبب اجمال و اختصار، صریحاً بیان نمی‌کند.
- شکاف ناپیموده<sup>۳</sup>: گاهی ریاضی‌دان، همه گزاره‌های یک زنجیره با بخشهای مشابه را جداگانه راستی آزمایی نمی‌کند؛ بلکه از درستی بخشی از آن و شباهت بخشهای دیگر، درستی کل زنجیره را نتیجه می‌گیرد.

در هر حال، اگر بخواهیم از گمراه‌کنندگی تصاویر، نامقبولیت اثباتهای تصویری را نتیجه بگیریم، گرفتار دو مغالطه «معیار دو گانه» و «تفسیر نادرست» شده‌ایم؛ زیرا اولاً گمراه‌کنندگی مختص تصاویر نیست و نمادها را نیز شامل می‌شود و بنابراین ما در مواجهه با نمادها نیز خطاپذیر هستیم. به تعبیر دیگر، این فقط معرفت دیداری<sup>۴</sup> ما نیست که خطاپذیر است، بلکه معرفت نوشتاری<sup>۵</sup> ما نیز چنین است. ثانیاً خطاپذیری<sup>۶</sup> مانع مقبولیت یک اثبات یا یک نوع اثبات نمی‌شود. همان‌طور که اشاره کردیم، آنچه

<sup>1</sup>. inferential gap

<sup>2</sup>. enthymematic gaps

<sup>3</sup>. untraversed gaps

<sup>4</sup>. Visual Knowledge

<sup>5</sup>. Verbal Knowledge

<sup>۶</sup>. خطاپذیری گاهی صفت یک منبع معرفتی، مثل ادراک حسی یا استدلال است، گاهی صفت خود معرفت و به‌طور کلی اندیشه، و گاهی نیز صفت شخص استدلال‌کننده یا به‌طور کلی اندیشنده است. اینجا هر سه نوع موصوف مورد نظر است.



موجب می‌شود ما در پذیرش اثباتهای تصویری تردید کنیم، نه گمراه کننده بودن آنها، بلکه خطاناباوری<sup>۱</sup> ما است؛ یعنی هنوز این آموزه دکارتی در نظام معرفتی ما باقی مانده که اگر یک باور موجه، تردیدپذیر باشد، معرفت نیست؛ درحالی که خطاناباوری اصلاً قابل دفاع نیست؛ چرا که ما را گریزی از خطاهای مختلف در مسیر انواع اندیشه و به-خصوص استدلال کردن نیست. اگر ما خطاباوری<sup>۲</sup> در ریاضیات را بپذیریم، از خطاپذیری اثباتها به اعتمادناپذیری و نامقبولیت آنها نخواهیم رسید.

### اثباتهای تصویری و ارسی پذیر نیستند

به نظر می‌رسد که اگر ما بخواهیم اثباتهای تصویری را به طور کلی و پیشینی رد کنیم، باید نشان دهیم که آنها اساساً و ارسی پذیر نیستند؛ زیرا و ارسی پذیری شرط عینیت یک فرایند تحقیقی است و فقدان آن در حکم شخصی شدن و ذهنی شدن فرایند مذکور خواهد شد. حتی اعتمادپذیری نیز مستلزم و ارسی پذیری است؛ زیرا در صورت و ارسی ناپذیری یک فرایند تحقیقی، همواره احتمال تغییرهای شخصی یا گامهای نادرست مغفول یا حتی آشکار شدن اقتضائات نامطلوب باقی می‌ماند. بنابراین اثبات، اگر و ارسی ناپذیر باشد، اعتمادناپذیر است. البته و ارسی پذیری اثبات لزوماً به معنای اعتبار آن نیست؛ همچنان که آزمون پذیری گزاره لزوماً به معنای صدق یا کذب آن نیست.

در نگاه نخست به نظر می‌رسد که حتی یک اثبات تصویری خوب، مثل اثبات شماره ۱، هر قدر هم به معنای وسیع کلمه دقیق باشد، یعنی شفافیت تبیینی بالایی داشته باشد، و از خطاهای ادراکی فرد استدلال کننده دور باشد، باز به دلیل این که همه جزئیات در آن به زبان منطق محمولات بیان و آشکار نشده است و گامهای استدلال سطر به سطر مکتوب نشده است، امکان بررسی آن برای دیگران، یا دست کم دیگر اعضای متخصص جامعه ریاضی، فراهم نشده است؛ یعنی این نوع از اثباتها و ارسی پذیر نیستند.

اما این تمایزی که در بالا توصیف شد بسیار ساده‌انگارانه است؛ یعنی برای اینکه یک اثبات و ارسی پذیر باشد لازم نیست که همه جزئیات به زبان منطق محمولات بیان و

1. infallibilism

2. fallibilism

آشکار شود و گامهای استدلال سطر به سطر مکتوب شوند؛ زیرا اولاً اگر درباره اثباتهای نمادی نیز سختگیر باشیم و به شکافهایی که فالیس متذکر می شود توجه کنیم، خواهیم دید که اغلب اثباتهای نمادی به گونه ای هستند که عملاً واریسی همه گامها در همه آنها به وسیله اعضای جامعه ریاضی ممکن نیست. برخی از آنها به دلیل مطول بودن و بسیار فنی و تخصصی بودن، و برخی نیز به دلیل فراوانی شکافهای اضماری و ناپیموده، عملاً غیر قابل واریسی هستند. ثانیاً تلقی مذکور از واریسی پذیری، مثل تلقی صورت گرایانه از دقت ریاضی، انحصار طلبانه است؛ زیرا بر اساس تاریخ ریاضی، می توان نشان داد ریاضی دانان اثباتهایی را پذیرفته اند که به معنای فوق واریسی پذیر نیستند. مثلاً ریاضی - دانان اثباتهای رایانشی را پذیرفته اند و آن را واجد عینیت و اعتماد پذیری یافته اند؛ حال آنکه بخش مهمی از بدنه اثبات های رایانشی وابسته به ماشین است. مهمتر از آن این که ریاضی دانان اثباتهایی را پذیرفته اند که عملاً در آنها تصویر بخش تعیین کننده ای از استدلال است؛ مثل اثباتهایی در هندسه که بر روش تقطیع یا بازچینی استوارند و ما در بخش های بعدی به نحو تفصیلی تر به آن خواهیم پرداخت. این واقعیتهای تاریخی نشان می دهند که واریسی پذیری اثباتها لزوماً مستلزم بیان آنها به زبان منطقی محمولات نیست و حتی لزوماً به معنای قابلیت واریسی نمادهای ریاضی به وسیله اعضای جامعه ریاضی نیست؛ بلکه ما عینیت و اعتماد پذیری اثباتها را با روشهای مختلفی می توانیم تضمین کنیم. پس ابتدا باید ببینیم واریسی پذیری دقیقاً به چه معناست؟

درباره مفهوم و انواع واریسی پذیری در دهه های اخیر، مطالعات فراوانی صورت پذیرفته است. مثلاً ادوین کلن سه نظریه عمده واریسی پذیری را این گونه از هم متمایز می کند (Coleman, 2008, 32-35):

- واریسی پذیری تیموچکویی: یک اثبات واریسی پذیر است اگر بتوان آن را به نحو معین به وسیله اعضای جامعه ریاضی بررسی کرد.
- واریسی پذیری ویتگنشتاینی: یک اثبات واریسی پذیر است اگر بتوان آن را با اطمینان و به عنوان یک ساختار باز تولید کرد؛ به همان روشی که تصاویر را می توان تکثیر کرد.

- واریسی پذیري دکارتی: یک اثبات واریسی پذیر است اگر بتوان گامهای آن را با هم در آگاهی حاضر کرد.

حال این پرسش قابل طرح است که اثباتهای تصویری به چه معنا می‌توانند واریسی پذیر باشند؟ من برای پاسخ به این پرسش، ابتدا تلقی‌های مختلف درباره واریسی پذیري را، براساس دو رویکرد عمده فلسفی ناظر به اثباتها و کلاً ریاضیات، از هم جدا و بازتعریف می‌کنم:

۱. واریسی پذیري ناواقع گرایانه: اثبات ریاضی، به مثابه فرایند تبدیل نمادها واریسی پذیر است، ا.ت.ا. بتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد نحوشناختی تبدیل، در آن مطمئن شد.

۲. واریسی پذیري واقع گرایانه: اثبات ریاضی، به مثابه فرایند راستی آزمایی یک مدعا واریسی پذیر است، ا.ت.ا. بتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد معناشناختی ارزش دهی، در آن مطمئن شد.

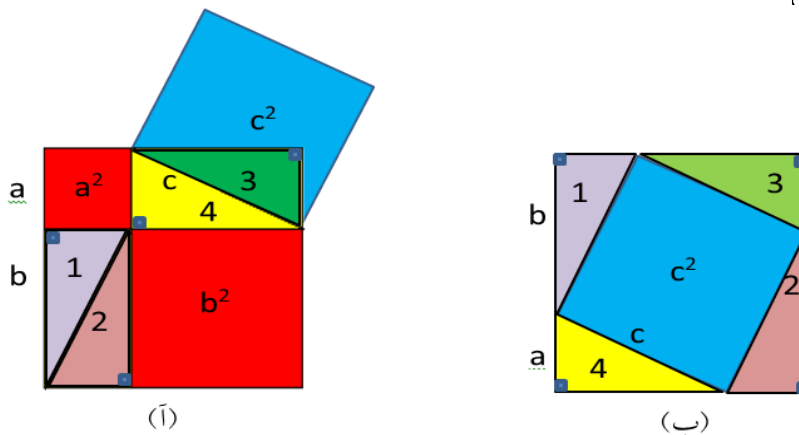
به نظر می‌رسد که واریسی پذیري ویتگنشتاینی و دکارتی، به ترتیب، ناواقع گرایانه و واقع گرایانه هستند. تلقی تیموچکو نیز به قدری کلی صورت بندی شده است که هر دو را شامل می‌شود. حال دوباره به سراغ این پرسش می‌رویم که اثباتهای تصویری به چه معنا می‌توانند واریسی شوند؟ تصاویر را اگر صرفاً به مثابه یک شیء تلقی کنیم، مطمئناً قابل واریسی نیستند؛ همچنان که نمادها نیز تنها در ارتباط معینی که با یکدیگر یا با معنای منطقی، یعنی ارزش صدقشان، دارند قابل واریسی اند. به طور کلی علائم، اعم از نمادها یا تصاویر، اگر قابل تعبیر و تحلیل به دو بخش مقدمه - یا مقدمات - و نتیجه باشند، در واقع می‌توانند استدلال تلقی شوند. چرا که استدلال یعنی فرایند گذر از مقدمه - یا مقدمات - به نتیجه. واریسی کردن نیز عملی است که ما درباره گامهای این فرایند انجام می‌دهیم. با این توضیحات، به نظر می‌رسد که ما می‌توانیم گامهای یک اثبات تصویری را به معنای واقع گرایانه کلمه واریسی کنیم؛ یعنی بخشهایی از یک تصویر، مثل تصویر شماره ۱، را در مراحل معین به عنوان مدعیاتی که در مقام مقدمه هستند در نظر بگیریم و ارزش صدق این مدعیات را تعیین کنیم؛ سپس بخش دیگری از تصویر را، به عنوان مدعایی

که در مقام نتیجه است، لحاظ کنیم و ارزش صدق آن را بررسی کنیم.

### اثباتهای تصویری جزئی هستند

یکی از اتهاماتی که به اثباتهای تصویری وارد می‌شود این است که آنها جزئی هستند. دتلفسن با ارجاع به برخی آثار فیلسوفان نامدار، مثل جان لاک، برکلی و هیوم، دیدگاه آنان درباره نقش تصاویر در ریاضیات را این‌گونه بیان می‌کند: حقایق ریاضی نوعاً حقایق کلی هستند؛ درحالی که نمودارها اشکالی جزئی هستند و استدلالی که بر امر جزئی استوار باشد در حکم تمثیل است نه قیاس، و بنابراین نمی‌تواند نقش توجیهی در ریاضیات ایفا کند (Detlefsen, 2008, 20).

باروایز و اچمندی در رد این اتهام، جنبه‌های عَرَضی یا تصادفی تصاویر را از جنبه‌های ضروری یا اجتناب‌ناپذیر جدا می‌کنند و استدلال می‌کنند که اگر نقش توجیهی تصاویر با توسل به جنبه‌های عرضی تصاویر باشد حق با مخالفان است؛ اما اگر استدلال تصویری بر جنبه‌های ضروری تصاویر استوار باشد، واقعاً توانایی مسجل کردن حقایق کلی را دارد. آنان برای اثبات مدعای خود مثالهایی را از تاریخ ریاضی یادآوری می‌کنند که چنین وضعیتی دارند. یکی از آنها اثبات قضیه فیثاغورس با استفاده از روش بازچینی یا تقطیع است.



تصویر شماره ۶:

طبق (آ):  $(a+b)^2 = 2ab + a^2 + b^2$  و طبق (ب):  $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$  با  $c^2 + 4ab/2 = 2ab + a^2 + b^2$ .

مقایسه این دو معادله و به کارگیری قاعده تساویهای جبری، نتیجه مطلوب  $(a^2+b^2=c^2)$  به دست می آید و اثبات تمام است.

به عقیده آنان می توان گفت: ۱- این اثبات به وضوح یک اثبات مشروع است. ۲- این اثبات ترکیبی است از استخدام هندسی تصاویر و استخدام جبری نمادها. ۳- تصاویر نقش تعیین کننده ای در این اثبات ایفا می کنند. ۴- به وضوح از ویژگیهای غرضی تصاویر استفاده نشده است (Barwise and Etchemendy, 1991, 12). باروایز و اچمندی در توضیح دیدگاه خود از مفهوم یکرختی<sup>۱</sup> استفاده می کنند. از نظر آنان یک نمودار خوب نموداری است که با وضعیت بازنمایی شده یکرخت -یا دست کم همریخت- باشد (Barwise and Etchemendy, 1991, 22). به نظر می رسد که تعمیم حکم از یک شکل جزئی به یک رابطه کلی نیز، در واقع، به موجب همین یکرختی یا همریختی قابل تبیین باشد.

۱. دو ساختار را یکرخت (isomorphic) گوئیم هرگاه بین مجموعه ها و عملگرهای آن دو ساختار، یک تابع یکرختی برقرار باشد؛ یعنی مثلاً در جبر مجرد فرض کنید  $(G, *)$  و  $(H, \#)$  دو گروه باشند؛ تابع  $\varphi: G \rightarrow H$  را یکرختی (isomorphism) گوئیم هرگاه یک به یک و پوشا باشد و این رابطه برقرار باشد:

$$\forall a, b \in G \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) \# \varphi(b)$$

یکرختی منحصر به ساختارهای جبری نیست. مثلاً فرض کنید علی و حسن و رضا دور میزی نشسته اند؛ به طوری که رضا سمت چپ حسن، و حسن نیز سمت چپ علی است. همچنین فرض کنید شما سه حیوان خانگی دارید: سگ، پرنده و خرگوش؛ به طوری که خرگوش پرنده را می ترساند و پرنده سگ را و سگ نیز خرگوش را می ترساند. از منظر ریاضیاتی می توان گفت که بین دو ساختار (سمت چپ، علی، حسن، رضا)  $A = \{ \}$  و (می ترساند، سگ، پرنده، خرگوش)  $B = \{ \}$  یکرختی برقرار است. اگر تعداد اعضای  $A$  و  $B$ ، یعنی انسانها و حیوانات، مساوی نباشد، همریختی برقرار است. براون در تقریر موضع باروایز و اچمندی از این مثال استفاده می کند و نشان می دهد که به این ترتیب «تشابه ساختاری» بین ساختارهای تصویری و انتزاعی را براساس مفهوم یکرختی و همریختی می توان صورت بندی کرد.

این تبیین، موافقان و مخالفانی دارد؛ از جمله اریک همر<sup>۱</sup> که آن را می‌پذیرد و در فصل اول کتابش «منطق و اطلاعات دیداری» (۱۹۵۵) به تفصیل توضیح می‌دهد. اما به عقیده براون، این ایده لزوماً درست نیست. مثلاً اگر به همان مثال ابتدای مقاله برگردیم، خواهیم دید که رابطه \* به ازای  $n=7$  برقرار است و طبق تبیینی که باروایز و دیگران پیشنهاد می‌دهند، حداکثر می‌توان مدعی شد که یک یکرختی بین این ساختار تصویری و یک ساختار انتزاعی با همان تعداد عضو، یعنی اعداد ۱ تا ۷، برقرار است؛ درحالی‌که ما به یک یکرختی با همه اعداد طبیعی نیاز داریم. به تعبیر دیگر، ما برای گذر از این هم‌رختی به یکرختی با کل اعداد، به دلیل جداگانه‌ای نیاز داریم. براون در عوض پیشنهاد دیگری دارد:

بنابراین قصد دارم پیشنهاد کاملاً متفاوتی بدهم. حدس جسورانه من (به تعبیر پوپری) چنین است: بعضی از «تصاویر» واقعاً تصویر نیستند، بلکه پنجره‌هایی به بهشت افلاطون-اند. نمودار مربوط به نظریه اعداد [تصویر ۱] یقیناً یک بازنمایی برای حالت  $n=7$  است؛ اما یک بازنمایی برای حالت کلی نیست. این نمودار، برای اثبات حالت کلی، به گونه‌ای دیگر عمل می‌کند؛ چیزی شبیه به یک ابزار. این دیدگاه، البته دیدگاهی واقع-گرایانه به ریاضیات است، و نه دیدگاهی واقع‌گرایانه به تصاویر. همچنان که تلسکوپ‌ها به چشم غیر مسلح کمک می‌کنند، نمودارها نیز ابزارها (و نه بازنمایی‌ها) هستند که به چشم غیر مسلح ذهن کمک می‌کنند (Brown, 2008, 40).

براون با برخی تمثیلهای تلاش می‌کند این بیان استعاری را پذیرفتنی‌تر سازد. مثلاً یک تصویر در نقش توجیهی، مثل تصویر ۱، را با یک تابلو نقاشی، مثل نقاشی ناپلئون اثر دیوید (در این تابلو، ناپلئون با هیبت مصمم، سوار بر اسبی سرزنده انگشت خود را به سمت جلو نشانه رفته است)، مقایسه کنید. به عقیده براون همچنان که بسیاری از زیبایی-شناسان، مثل آرنه‌ایم، دو کارکرد مختلف برای این تابلو قائل‌اند، ریاضی‌دانان نیز می‌توانند برای تصویر ۱ دو کارکرد در نظر بگیرند: تابلوی دیوید تصویری<sup>۲</sup> است که یک

<sup>۱</sup>. Eric Hammer

<sup>۲</sup>. a picture

چیز ملموس، یعنی ناپلئون، را بازنمایی می‌کند و درعین حال نمادی<sup>۱</sup> است که ما از طریق آن، اموری/تنتزاعی، مثل رهبری و شهامت و ماجراجویی، را می‌بینیم. تصویر ۱ نیز، از یک سو، تصویری است که درستی رابطه\* را برای حالت خاص، یعنی  $n=7$  بازنمایی می‌کند، و درعین حال نمادی است که ما از طریق آن می‌توانیم درستی رابطه\* را برای هر  $n$  ببینیم (Brown, 2008, 44).

پیشنهاد براون برای لحاظ کردن ابزاری تصاویر و نمودارها، و لحاظ کردن تصاویر به‌مثابه پنجره‌هایی رو به بهشت افلاطونی، زمانی پذیرفتنی خواهد بود که ما قبلاً معقولیت وجود یک قوه ادراکی به نام «چشم ذهن» یا عمل ادراکی «دیدن هستومندهای ریاضیاتی» را پذیرفته باشیم. حدس جسورانه براون، گرچه قدرت تبیینی خوبی دارد، اما به مفروضات سهمگینی نیز وابسته است. براون خود بر این نکته واقف است و گرچه ادعا می‌کند که ابایی از این بیان استعاری و استدلال ذوقی ندارد، اما به نظر می‌رسد که خود عملاً از این پاسخش راضی نیست؛ زیرا در نهایت، تلاش می‌کند با یک موضع‌گیری پراگماتیستی، نشان دهد که پذیرش این نوع از اثباتها در مقایسه با نادیده گرفتن آنها مقبول‌تر است (Brown, 2008, 47).

اما به نظر من ایراد ششم، یعنی جزئی بودن تصاویر، راه حل بسیار آسان‌تری دارد. اتهام جزئی بودن تصاویر بیان نادرستی از ایراد پنجم، یعنی عدم واریسی‌پذیری، است و ایراد پنجم نیز به نظر می‌رسد بنا بر دلایلی که برشمردیم وارد نیست؛ یعنی در واقع اچمندی، باروایز، هم‌ر و براون از ابتدا در یک زمین نامربوط وارد بازی شده‌اند. بنابراین کافی است در اینجا نشان دهیم که اتهام ششم (جزئی بودن) بیان نادرستی از اتهام پنج (واریسی‌پذیری) است. برای این کار من مفهوم جزئی بودن و مفهوم واریسی‌پذیری را مقایسه می‌کنم:

**جزئییت:** یک مفهوم، جزئی است هرگاه کلی نباشد؛ یعنی قابل حمل بر مصادیق کثیر نباشد (معنای اول)؛ یا اینکه، یک جمله، جزئی یا شخیصیه است هرگاه صدق‌ساز آن یک واقعیت کلی، یا کل اعضای یک مجموعه معین بیش از یک عضوی، نباشد (معنای دوم).

<sup>1</sup>. a symbol

**وارسی ناپذیری:** یک فرایند، وارسی ناپذیر است هرگاه نتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد نحوشناختی تبدیل، در آن مطمئن شد (تعریف ناواقع گرایانه)؛ یا اینکه، نتوان گامهای آن را بررسی کرد تا از درستی قواعد معناشناختی ارزش دهی، در آن مطمئن شد (تعریف واقع گرایانه).

حال روشن است که تصویر در یک اثبات، یک فرایند یا بخشی از یک فرایند است، نه یک مفهوم یا یک جمله. تصویر البته به خودی خود، یک فرایند نیست؛ اما وقتی قرار باشد از آن برای گذر از مقدمات به نتیجه استفاده شود، باید به مثابه یک فرایند لحاظ شود. در حقیقت، وارسی پذیری، یک صفت ممکن برای فرایند استدلال است و صفت متناظر با آن برای جملات، اثبات پذیری یا ابطال پذیری و نظایر آن است.

بنابراین اگر منظور ما از «تصاویر»، فرایند استدلال ملحوظ در تصاویر باشد، آنگاه جزئی بودن تصاویر تنها یک معنای محصل می تواند داشته باشد و آن اینکه فرایند استدلالی خاصی در زمان و مکان خاصی تحقق یابد؛ یعنی ما با یک فرایند موردی<sup>۱</sup> مواجه باشیم. اما روشن است که آنچه برای اعتبار و وثاقت و عینیت فرایندهای استدلالی حائز اهمیت است، بررسی پذیری (اگر استدلال پسینی باشد) یا وارسی پذیری (اگر استدلال پیشینی باشد) آنها است، نه موردی بودن یا نوعی<sup>۲</sup> بودن آنها. به تعبیر دیگر، اگر موردی بودن یک اثبات تصویری ایراد محسوب شود، تر و خشک با هم خواهد سوخت؛ زیرا این ایراد بر اثباتهای نمادی موردی نیز وارد خواهد بود.

درباره وارسی پذیری اثباتها باید به یک نکته دیگر نیز توجه کرد: اثبات قضیه ای که متضمن بی نهایت مقدار است، مثل معادله \*، گرچه مستلزم بی نهایت گام است، اما آنها گامهای بالفعل نیستند و اساساً چنین چیزی قابل تصور نیست. بنابراین وارسی چنین اثباتی نیز متضمن وارسی یک بی نهایت بالقوه است، نه بی نهایت بالفعل. چنین تمایزی تقریباً در همه فلسفه های ریاضی به چشم می خورد؛ یعنی فیلسوفان در تبیین وارسی بی نهایت گام در اثباتها، به نوعی این دو نوع بی نهایت را از هم متمایز می سازند و به بالقوه بودن آنها

<sup>1</sup>. Token process

<sup>2</sup>. Type process



تأکید می‌کنند (Marion, 1998, 187). به‌خصوص این تعبیر ویتگنشتاین حتی برای واقع‌گرایان نیز کارساز و روشن‌گر است که «بی‌نهایت و بی‌پایانگی یک قانون یا قاعده است، نه بی‌پایانگی یک مجموعه از مصادیق» (Marion, 1998, 182). بنابراین آنچه در فرایند یک اثبات مهم و تعیین‌کننده است، تکرار و تداوم بالقوه یک ساختار نمادی یا تصویری است، نه تکرار و تداوم بالفعل آن؛ و آنچه در تعیین اعتبار یا صحت یک اثبات مهم و تعیین‌کننده است، واریسی‌پذیری این تکرار و تداوم است، نه نحوه بازنمایی (نمادی یا تصویری) آن، و نه موردی (جزئی) یا نوعی (کلی) بودن آن.

### اثباتهای تصویری مشروع نیستند

ممکن است گفته شود که اثباتهای تصویری عملاً مورد اعتنای ریاضی‌دانان نیستند و این به معنای عدم مشروعیت نهادی آنهاست و بنابراین نباید آنها را پذیرفت. در تحلیل و نقد این ایراد باید توجه کرد که اولاً توسل به مفهوم «مشروعیت» نهادی در رد اعتبار یک اثبات یا یک نوع اثبات استلزامات خاصی دارد که باید آنها را نیز پذیرفت؛ از جمله اینکه باید دانش ریاضیات را به‌عنوان یک امر اجتماعی، یعنی واقعیتی که متأثر از ارزشهای جامعه ریاضی‌دانان است، تحلیل کرد. این تذکر بیشتر از آن روست که گاهی اعضای جامعه ریاضی با یک تلقی دوگانه و متناقض درباره مقبولیت اثباتهای تصویری داوری می‌کنند؛ یعنی از یک سو، با یک نگاه طبیعی و افلاطونی، ریاضیات را امری مستقل و آزاد از ارزشهای ریاضی‌دانان می‌پذیرند و از سوی دیگر، نامقبولیت آن را نه با توسل به ایرادهای روش‌شناختی یا منطقی یا معرفت‌شناختی، بلکه با توسل به مفهوم جامعه‌شناختی «مشروعیت» رد می‌کنند. مثلاً یکی از پیامدهای توسل به جنبه نهادی و اجتماعی ریاضیات این است که مقبولیت یک نظریه یا روش در علم تابعی از اثرماتیو<sup>۱</sup> است. اثرماتیو اصطلاحی است که رابرت مرتون آن را ابداع کرده و نقش شهرت افراد

<sup>۱</sup>. Matthew Effect

را در مقبولیت مدعیات یا استدلالهای علمی او توصیف می‌کند.<sup>۱</sup> بنابراین حتی اگر بپذیریم که اثباتهای تصویری نامشروع هستند و با این دلیل آنها را نامقبول بدانیم، باید دست از تلقی کلاسیک، یعنی تلقی غیرتاریخی از ریاضیات، نیز برداریم. اما این تنها پیامد چنین حکمی نیست. اگر ما اثباتهای تصویری را به دلیل نامشروعیت نهادی نامقبول بدانیم، باید این را نیز بپذیریم که این وضعیت همواره ممکن است با مواضع و آثار ریاضی دانان برجسته، مثل برندگان فیلدز، دگرگون شود. این امر نه تنها بعید نیست، بلکه به دو دلیل تاریخی می‌توان مدعی شد که عملاً اتفاق افتاده است.

دلیل اول آن دسته از نظریه‌های ریاضی است که بر روش و رویکردهای ناصورت-گرایانه و غیر کلاسیک و از جمله اثباتهای تصویری رایانشی استوارند؛ مثل نظریه آشوب و هندسه فراکتالها. مدعیات و حدسها در این نظریه‌های ریاضی، از یک سو بر تصاویری که رایانه ترسیم می‌کند استوارند، از سوی دیگر، این مدعیات و الگوهای استنتاجی با به کارگیری و موضع‌گیری ریاضی دانان برجسته و به خصوص برندگان فیلدز، تلویحاً و تصریحاً مشروعیت یافته‌اند. براون گزارش جامعی از طرفداران این نگرشهای غیر کلاسیک را عرضه کرده است (Brown, 2008, 47). دلیل دوم نیز تاریخی است، اما به خود ریاضیات کلاسیک مربوط می‌شود و بنابراین، اگر به خوبی مستند و صورت‌بندی شود، بسیار کمتر از دلیل اول مناقشه‌آمیز خواهد بود؛ یعنی می‌توان گفت که نه تنها در ریاضیات غیر کلاسیک، بلکه در ریاضیات کلاسیک نیز، اولاً ریاضی دانان عملاً اثباتهای تصویری را به کار گرفته‌اند و ثانیاً برخی از ریاضی دانان باصراحت به مقبولیت این نوع اثباتها و نقشهای تعیین‌کننده تصاویر در نظریه‌ها و قلمروهای کلاسیک ریاضیات اذعان کرده‌اند. در اینجا به ترتیب، ابتدا به برخی شواهد تاریخی و سپس برخی مواضع ریاضی دانان اشاره می‌کنم.

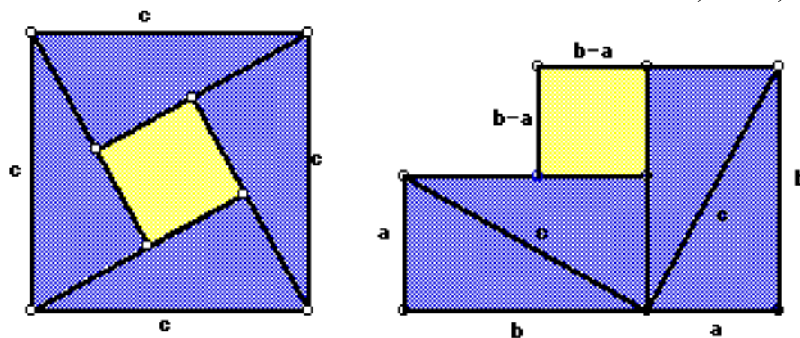
**شواهد تاریخی:** به لحاظ تاریخی، اثباتهای آمیخته، یعنی نمادی-تصویری، پدیده

---

<sup>۱</sup>. او نام این نظریه‌اش را از انجیل متی Matthew گرفته است: «به کسی که داراست باز هم داده می‌شود، تا آنچه دارد بیشتر شود، و از کسی که چیزی ندارد، ستانده می‌شود تا آن مقدار کمی هم که دارد کمتر شود»، آیه ۲۹، فصل ۲۵ انجیل متی.

جدیدی نیستند و در واقع بسیاری از اثباتهای هندسی اقلیدس از این نوع هستند؛ یعنی اثباتهای فراوانی در کارند که آگاهانه یا ناآگاهانه بخشی از بار توجیه یا اقناع در آنها به دوش تصاویر هستند. باروایز و اچمنندی مثالهایی را از تاریخ ریاضی می‌زنند و نشان می‌دهند که آنها، در عین مشروعیتشان، بر تصاویر استوارند. یکی از آنها اثبات قضیه فیثاغورس با استفاده از روش بازچینی یا تقطیع است (Barwise and Etchemendy, 1991, 12). افزون بر اثباتهای آمیخته، می‌توان ردپای اثباتهای تصویری ناب یا بی‌کلام را نیز دست‌کم تا ۸۰۰ سال پیش دنبال کرد. یکی از این نوع اثباتها متعلق به ریاضی‌دان هندی قرن ۱۲، معروف به بهاسکارای دوم<sup>۱</sup>، برای قضیه فیثاغورس است. او در کتاب معروف خود «لیلاواتی»<sup>۲</sup> یک اثبات بی‌کلام برای قضیه فیثاغورس عرضه می‌کند؛ یعنی تصویری مشابه با شکل زیر رسم می‌کند و در کنار آن تنها یک کلمه می‌نویسد: بنگر!

(Burton, 2006, 109).



تصویر شماره ۷

در واقع با حسابی‌سازی آنالیز در قرن ۱۹ بود که تلاشها برای کاستن نقش توجیهی و اقناعی شهود و تصویر در اثباتهای ریاضی بیشتر شد و اثباتها صوری‌تر و لفظی‌تر شدند. با این حال، تصاویر تا دهه هشتاد قرن ۱۹ همچنان نقشهای مهمی، نه تنها در هندسه، بلکه در سایر قلمروها مثل حسابان و حتی منطق ریاضی، ایفا می‌کردند. مثلاً جان ون<sup>۳</sup> در «منطق نمادی» (۱۸۸۱) از نمودارها برای توجیه مدعیات یا تعیین اعتبار استنتاجها در

<sup>۱</sup>. Bhaskara II

<sup>۲</sup>. Lilavati (Līlavatī)

<sup>۳</sup>. John Venn

نظریه مجموعه‌ها استفاده می‌کرد. اما جریان صوری‌سازی بیش از پیش قدرت گرفت و هیلبرت در «مبانی هندسه» (۱۸۹۹) موفق شد هندسه را به‌طور کامل اصل موضوعی کند. از دهه پایانی قرن نوزدهم به این سو، به علت غلبه صورت‌گرایی، تصاویر و نمودارها، مثل نمودارهای ون، صرفاً ابزاری کمکی روان‌شناختی، یعنی برای تقریب به ذهن، قلمداد می‌شد. اما این روند از نیمه دوم قرن بیستم کم‌کم کندتر شد و به‌خصوص از دهه پایانی قرن بیستم، جریان معکوسی در جهت به رسمیت شناختن اثباتهای تصویری آغاز شده است.

**مواضع ریاضی‌دانان کلاسیک:** تحقیقات خوبی درباره فراگیر شدن اثباتهای تصویری و به رسمیت شناختن آنها انجام گرفته که من از میان آنها به گزارش‌های خانم هانا اشاره می‌کنم. هانا که مطالعات وسیعی در این حوزه انجام داده است، درباره دگرگونی مفهوم سنتی صورت‌گرایانه اثبات در نزد اعضای جامعه ریاضی و نظر آنها درباره نقش عوامل غیرنمادی در قدرت توجیهی و اقناعی اثباتها می‌گوید:

در دو دهه اخیر ریاضی‌دانان و معلمان ریاضی فراوانی این عقیده را که مهم-ترین جنبه ریاضیات همان نوع استدلال قیاسی است که در اثباتهای صوری به اوج می‌رسد، به چالش کشیده‌اند. در نظر آنها چیزهای بسیار بیشتری از سیستمهای صوری در ریاضیات وجود دارند. ریاضیات اثباتهایی با درجه اعتبار صوری مختلف را به خود راه داده است و باین حال هنوز به همان اندازه قابل قبول است که بود. گذشته از این، ریاضی‌دانان موافقاند که اگر یک اثبات فقط به‌موجب صورتش، و فارغ از محتوایش، معتبر باشد تنها اندکی به فهم ما در باره آن موضوع می‌افزاید و حتی شاید ذره‌ای در اقناع‌کنندگی آن تغییر ایجاد نکند (Hanna, 1989, 20).

### اثباتهای تصویری خودبسنده نیستند

در گفتگو با اعضای جامعه ریاضی، هنگام دفاع از اثباتهای تصویری، متوجه خواهیم شد که به‌باور بعضی از آنان، همواره باید یک اثبات صوری بالفعل یا بالقوه حامی یک اثبات تصویری در کار باشد و بنابراین اثباتهای تصویری نوع اصیل و مستقلی نیستند. مثلاً ما اثبات شماره ۱ را به این دلیل می‌پذیریم که دست‌کم یک اثبات صوری معتبر، با روش استقرای ریاضی، برای آن سراغ داریم، به‌طوری‌که این اثبات تصویری تنها

الهام بخش آن اثبات صوری است یا تبیین تصویری آن است، اما به خودی خود هیچ اصالتی ندارد.

این ویژگی اثباتهای تصویری را می‌توانیم خودنابسنده‌گی بنامیم. در واقع ادعای مخالفان این است که اثباتهای تصویری را نمی‌توان به‌مثابه یک نوع اصیل از اثباتهای ریاضی پذیرفت، چون آنها خودنابسنده‌اند. به نظر می‌رسد که در اینجا باید بین دو نوع خودنابسنده‌گی تمایز قائل شویم. گاهی مخاطب، یک اثبات یا یک نوع اثبات را، به علت عدم تجویز در نظام آموزشی یا به علت نامتعارف یا نامشروع بودن، نمی‌تواند، مستقل از هر اثبات پشتیبان دیگری، بپذیرد. گاهی نیز مخاطب، یک اثبات یا یک نوع اثبات را، به دلیل فقدان هنجارها یا معیارهای روش‌شناختی، مثل ویژگی‌های واریسی پذیری یا دقت یا اعتمادپذیری، نمی‌تواند، مستقل از هر اثبات پشتیبان دیگری، بپذیرد. این دو را، به ترتیب، خودنابسنده‌گی روان‌شناختی و روش‌شناختی می‌نامیم.

به نظر می‌رسد با توجه به دفاعی که از دقت و واریسی‌پذیری و اعتمادپذیری اثباتهای تصویری به عمل آوردیم، اگر کسی به خودنابسنده‌گی اثباتهای تصویری معتقد باشد، باید مدعی او را به معنای روان‌شناختی کلمه تحلیل کنیم؛ یعنی اثباتهای تصویری صرفاً به علت عدم آموزش در مدارس و نظام آموزشی یا به علت نامتعارف بودن یا نامشروع بودن، خودنابسنده به نظر می‌رسند. بسیاری از فیلسوفان از جمله ویتگنشتاین (Bosanquet, 1976, 38) و رزنیک به این نکته تصریح کرده‌اند. رزنیک در مقاله «اثبات به‌مثابه منبع صدق» مدعی است که یک اثبات از آن‌رو موجب تسجیل یک قضیه می‌شود که فرایندی را برای استنتاج قضیه معرفی می‌کند که قبلاً آموزش داده شده است (Resnik, 1992, 1).

اما این مدعا نیز حداکثر مستلزم این نتیجه است که اثباتهای تصویری، نه به دلیل ایرادهای درونی و اساسی تصاویر، بلکه به علت ارزشهای نظام آموزشی ناخودبسنده و نامقبول هستند. البته همین نتیجه‌گیری هم، به لحاظ تاریخی، قابل دفاع نیست؛ زیرا چه بسیار اثباتهای آمیخته، یعنی اثباتهای نمادی-تصویری، که در آنها بخشی از بار اقناع و توجیه به دوش نمادها و بخشی نیز به دوش تصاویر است. یعنی در واقع اثباتهای تصویری پیش از این هم در نظر ریاضی‌دانان مشروعیت و مقبولیت داشتند و منحصر کردن اثباتها

به اثباتهای صوری یا نمادی در واقع یک حکم «جزمی» است که در قرن بیستم صادر شده است.

### اثباتهای تصویری فراگیر نیستند

یکی دیگر از مقاومتهای ریاضی دانان در مقابل اثباتهای تصویری محدودیت‌های ذاتی این نوع اثباتها در مقایسه با اثباتهای نمادی است. این محدودیتها در واقع به دو نوع عمده قابل تحویل‌اند: عدم فراگیری و عدم زیایی.

اگر ما نیز مانند راجر نلسون تلاش کنیم تا اثباتهای تصویری را جمع‌آوری کنیم، شاید تعداد آنها فراتر از چند جلد کتاب نباشد و این با حجم انبوه اثباتهای نمادی اصلاً قابل مقایسه نیست. اما این ایرادی نیست که به مقبولیت اثباتهای تصویری کوچک‌ترین آسیبی وارد کند. این در حقیقت مغالطه‌ی دلیل‌بی‌ربط است که ممکن است ما مرتکب شویم؛ چون کسی تا کنون ادعا نکرده است که همه یا اغلب اثباتهای ریاضی را می‌توان به روش تصویری نیز اثبات کرد؛ همچنان‌که همه قضایا را نمی‌توان و لازم نیست که با روش استقرایی یا ساختی اثبات کرد. به همین دلیل است که براون نیز هنگام دفاع از اثباتهای تصویری تأکید می‌کند که تصاویر تنها در برخی حالات به مثابه شواهد و قرائن دقیق عمل می‌کنند. «ادعای من این نیست که همیشه چنین شواهد دقیقی در کار است، یا اینکه در هر مورد خاصی وجود تصاویر هم لازم باشد» (Brown, 2008, 199).

با این حال، نباید اثر ماتیو را فراموش کنیم. اگر ریاضی‌دانان سرمایه‌های فکری خود را در این مسیر صرف کنند، مسلماً حجم بیشتری از اثباتهای تصویری را شاهد خواهیم بود.

### اثباتهای تصویری زایا نیستند

نوع دیگر محدودیت اثباتهای تصویری، نه به میزان شمول و فراگیری آنها، بلکه به نقش توسیعی و تولیدی این نوع اثباتها مربوط می‌شود. ما می‌دانیم که بسیاری از مفاهیم و روشها و الگوها و نتایج، حاصل اثباتهای نمادی هستند؛ اما با توسل به اثباتهای تصویری به نظر نمی‌رسد که ریاضیات رشد یابد. این ایراد نیز مانند ایراد قبلی خللی به مقبولیت اثباتهای تصویری وارد نمی‌سازد؛ زیرا مقبولیت یک الگوی استنتاجی در ایفای نقش توجیهی (اعم از توجیه معرفتی یا نحوشناختی) یک مدعا است و توانایی آن الگو در ایفای نقشهای

دیگر، از جمله توسیع فرایندها و تولید فرآورده‌های ریاضیاتی، مدعایی دیگر. اما افزون بر آن، ساده‌انگاری بزرگی نیز در این ایراد مشاهده می‌شود. تصاویر و اثباتهای تصویری در حد خود نقش انکارناپذیری در رشد و توسعه ریاضیات دارند. در مقدمه همین مقاله به مهم‌ترین کارهایی که به تبیین این نقش پرداخته‌اند اشاره کردیم. مثلاً براون ابتدا به‌طور کلی دو نوع شواهد و قرائن در ریاضیات را از هم متمایز می‌کند: قیاسی و استقرایی. شواهد استقرایی عبارت‌اند از هر آنچه به وثاقت یک برهان سنتی نرسد؛ مثل استقرای شمارشی، تمثیل، و تجربه وسیع. او سپس استدلال می‌کند که حتی اگر قائل شویم فقط شواهد قیاسی، یعنی اثباتهای نمادی، می‌توانند نقش توجیهی ایفا کنند، باز هم شواهد استقرایی برای توجیه مدعیات ریاضیاتی و به‌طور کلی توسعه ریاضیات لازم‌اند؛ زیرا اثباتهای کلاسیک در نهایت، بر اصول موضوعه استوارند و اصول موضوعه نیز بر شواهد استقرایی. یکی از همین نوع شواهد استقرایی، تصاویر و نمودارها هستند (Brown, 2008, 31). بنابراین تصاویر و اثباتهای تصویری ناب و آمیخته، عملاً نقشهایی ضروری و جانشین‌ناپذیر در برنامه‌های پژوهشی در ریاضیات ایفا می‌کنند.

### نتیجه‌گیری

از مجموع بررسی‌های صورت گرفته در اینجا، می‌توان درباره مقبولیت اثباتهای تصویری به چهار نتیجه مهم اشاره کرد. نخست اینکه «مقبولیت» یک اثبات یا یک نوع اثبات گاهی معنای روش‌شناختی دارد، که در این صورت مهم‌ترین معیارهای مقبولیت عبارت‌اند از واریسی پذیری و اعتمادپذیری؛ گاهی نیز معنای جامعه‌شناختی دارد که در این صورت چیزی جز مشروعیت نیست.

نکته دوم اینکه به نظر می‌رسد، به هیچ‌کدام از این دو معنا، نمی‌توان درباره نوع اثباتهای تصویری به نحو پیشینی و کلی حکم به قبول یا رد داد؛ بلکه باید به‌طور موردی یا مصداقی داوری کرد. اثباتهای تصویری گاهی مقبول و گاهی نامقبول‌اند.

سوم اینکه وقتی درباره مقبولیت یک اثبات تصویری صحبت می‌کنیم، درباره نقشهای مهم‌تر و مؤثرتر تصاویر و نمودارها، از جمله نقش شناختی اقناع و نقش معرفت-

شناختی توجیه، صحبت می‌کنیم، نه صرفاً نقشهای روان‌شناختی، مثل ملموس کردن و آسان‌یاب کردن مدعیات و دلایل ریاضیاتی.

نکته‌نهایی اینکه نپذیرفتن این نوع از اثباتها بیشتر معلول عوامل روان‌شناختی و جامعه‌شناختی، به‌خصوص غلبه تلقی صورت‌گرایانه در جامعه ریاضی و القای آموزه‌های صورت‌گرایانه در نظام‌های آموزش ریاضی است تا دلایل منطقی یا روش‌شناختی. ما نه-تنها دلایل قوی بر رد کلی و اساسی این نوع اثبات، به‌عنوان یک الگوی استنتاجی در ریاضیات، نداریم، بلکه دلایل خوبی برای به رسمیت شناختن آن داریم. آنچه در اینجا حائز اهمیت است، آگاهی از نقشی است که این نوع از اثباتها در کل ریاضیات دارد یا باید داشته باشد، نه کمتر و نه بیشتر.

### سپاس و تقدیم

طرح و صورت‌بندی بخش مهمی از مطالب این مقاله را مدیون گفتگویی هستم که در جریان سخنرانی‌ام، با عنوان «مرگ اثبات»، در دانشکده ریاضی دانشگاه زنجان، با اساتید گروه فلسفه و ریاضی آن دانشگاه صورت گرفت؛ به‌خصوص بندهای ۸ تا ۱۰ مقاله با نقدهای اساتید شکل گرفت و سایر بندها نیز در واکنش به مذاقه‌ها و نقدهای ایشان شکل کامل‌تری یافت. از راهنمایی‌ها و گفتگوهای شوق‌انگیزشان سپاسگزارم و این نوشتار ناچیز را به گروه ریاضی دانشگاه زنجان تقدیم می‌کنم.



## منابع

- Bayat, H. (2015), “Lakatos and Hersh on mathematical proof” in *Philosophical Investigations*, University of Tabriz, 2015, Vol. 9, No. 17, pp. 75 – 93.
- Barwise, J. and Etchemendy, J. (1991), “Visual Information and Valid Reasoning”, in W. Zimmerman and S. Cunningham (eds.), in *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, pp. 3-25.
- Brown, J. R. (1997), “Proofs and Pictures”, *British Journals for Philosophy of Science*, 48:161-180.
- Brown, J. R. (2008), *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge.
- Bosanquet R. G. and others, (1976), *Wittgenstein’s Lectures on the Foundations of mathematics: Cambridge 1939*, Cora Diamond (ed.), The Harvester Press.
- Burton, D. M. (2006), *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill.
- Coleman, E. (2008), “The Survey ability of Long Proof” in *Foundations of Science*, Springer, Vol. 14, pp. 27-43
- Fallis, D. (2003), “Intentional Gaps in Mathematical Proofs”, *Synthese*, 134:45-69
- Giaquinto, M. (1994), “Epistemology of visual thinking in elementary real analysis”, *British Journal for Philosophy of Science* 45: 789-813.
- Hammer, E. (1995), *Logic and Visual Information*, Studies in Logic, Language and Information, Stanford: CSLI and Cambridge

University Press.

Hersh, R. (1997), *What Is Mathematics, Really?* Oxford University Press, New York,.

Hanna, G. (1989), “Mor than Formal Proof,” *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No 1, 20-25.

Hilbert, D. (1894), *Grundlagen der Geometrie, Unpublished lectures*, Niedersächsische Staat-und Universitätsbibliothek, Cod. Ms. Hilbert, 594.

Hilbert, D. (1902), *Grundlagen der Geometrie, Unpublished lectures*, Mathematisches Institut, Gottingen.

Lakatos, Imre, (1976), *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*, Eds: John Worrall, Elie Zahar, Cambridge University Press.

Lakatos, Imre, (1978), “Mathematics, science and epistemology” in *Philosophical Papers* vol 2, Eds: John Worrall, Gregory Currie, Cambridge University Press, pp. 61-69.

Marion, M. (1998), *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Nelson, R. B. (1993), *Proofs without Words*, the Mathematical Association of America.

Nelson, R. B. (2000), *Proofs without Words II*, the Mathematical Association of America.

Resnik M. D. (2005), “Proof as a Source of Truth”, *In Proof and Knowledge in Mathematics*, Detlefsen M. (ed.), pp. 1-17.